思考と発見のある授業（３）

名　雪　順　一*

Class with thinking and finding（３）

NAYUKI　Junichi*

キーワード：アクティブ・ラーニング、2 次方程式、解の公式、図形、面積図

１．はじめに

2017 年度、2018 年度、東京電機大学総合文化研究の研究ノート投稿に引き続き、「思考と発見のある授業（３）」として「主体的・対話的で深い学び」の授業実践をレポートします。

2017 年度は、「文字式」、2018 年度は、「式の展開、因数分解」を取り上げました。

今回は、中学校数学の最終目標である「2 次方程式」を取り上げます。

「2 次方程式」の数式を図形（面積図）に表し、視覚化します。式の構造を目に見える形にすると、考えるヒントになり、想像する、推理することが出来るようになります。そのことによって、生徒たちが自ら考え、自ら学ぶことが出来、考える力が育っていきます。それが、文科省の教育目標である「主体的・対話的で深い学び」となり、生徒たちは、創造力、思考力などの能力を育てていくことになります。

2. 数式を図形に表す（１）

2 次方程式　「x^2　－７　＝　０」　の数式を図形に表して解いてみましょう

方程式を解くと、x　＝　数値　になります。したがって、x を含む項の数式は、左辺に、定数項（数値）は、右辺に集めます。

そのために、次の計算をします。

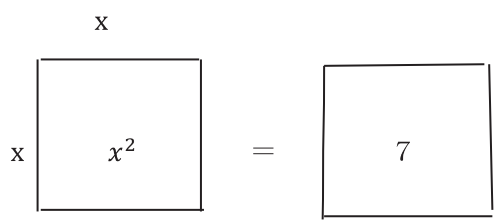
$$
\begin{array}{rccc}
 & x^2 & -7 & = 0 \\
+) & & +7 & +7 \\
\hline
 & x^2 & & = +7
\end{array}
$$

x^2　＝　x ×x　と表せます。

これは、「面積　＝　たて　×　よこ」のことです。

面積　＝　x^2　、たて　＝　x 、よこ　＝　x

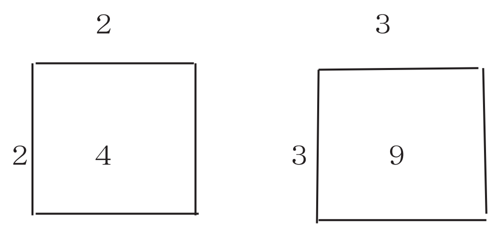
よって、方程式　「x^2　＝　7」を面積図で表すと、下図になります。



ここで、右辺の正方形の一辺の長さを求めます。

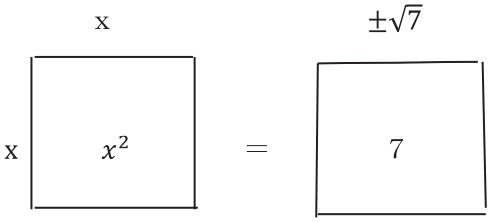
一辺の長さ２の場合、面積は４です。

一辺の長さ３の場合、面積は９です。



*理工学部共通教育群非常勤講師　Part-time Lecturer, Division of Liberal Arts, Naturel, Social and Health Sciences, School of Science and Engineering

したがって、面積が７の場合の一辺の長さは、整数２と３の間にあり、２．……となり、整数になりません。この場合、数学では、一辺の長さを面積の７を用いて、$\sqrt{7}$（ルート７）と表します。
$\sqrt{7}\times\sqrt{7}$＝７となります。
また、$(-\sqrt{7})\times(-\sqrt{7})$＝７ですから、
面積７の場合の一辺の長さは、$\pm\sqrt{7}$です。



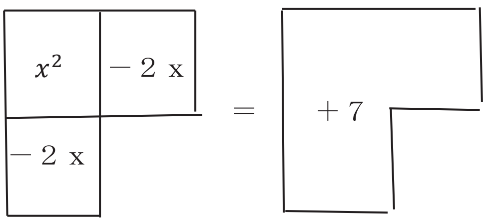
よって、左辺の正方形の一辺の長さｘと右辺の正方形の一辺の長さ　$\pm\sqrt{7}$　は、等しくなります。　ｘ　＝　$\pm\sqrt{7}$　です。
２次方程式　「x^2　－７　＝　０」に戻り、
これを解くと、ｘ　＝　$\pm\sqrt{7}$　となります。

３．数式を図形に表す（２）

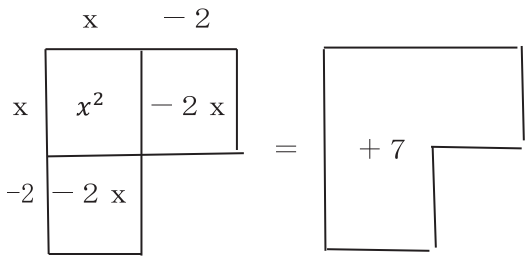
「 $x^2-4\,x-7=0$ 」の数式を図形に表してみましょう。
ｘ を含む項の数式は、左辺に、定数項（数値）は、右辺に集めます。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-4\,x-7=0 \\
+) & \qquad\quad +7 \quad +7 \\
\hline
 & x^2-4\,x \qquad = +7
\end{array}
$$

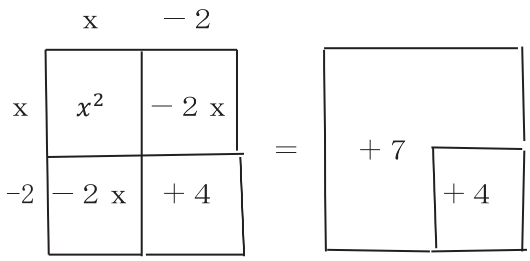
上記の項を下図のようにします。
（－４ｘは、－２ｘと－２ｘに２等分する）



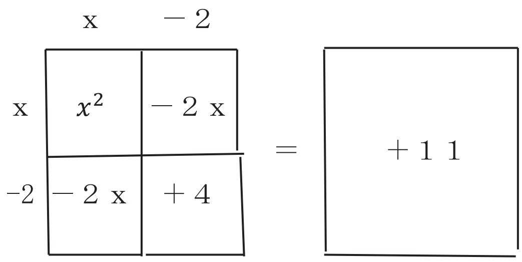
ここで、辺の長さを決めると、下図になります。



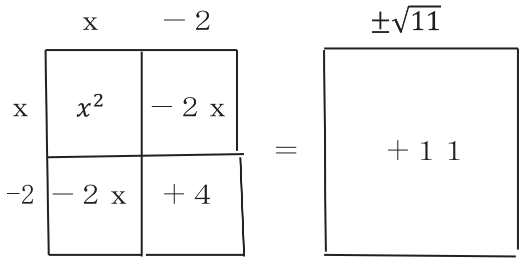
正方形にするため、右下を埋めます。



右の正方形の面積は、１１となります。



よって、右の正方形の一辺の長さは、$\pm\sqrt{11}$



左と右の正方形の辺の長さが等しいことより、
ｘ　－２　＝　$\pm\sqrt{11}$

これから　ｘ　を求めると、
ｘ　＝　２ $\pm\sqrt{11}$
これが、$x^2-4\,x-7=0$の解です。

4．「ax^2＋b x ＋c＝０」を図形に表す

２次方程式の一般式「 ax^2＋b x ＋c＝０ 」を図形に表してみましょう

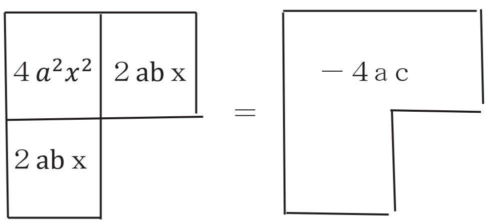
x を含む項の数式は、左辺に、定数項（数値）は、右辺に集めます。

$$
\begin{array}{rl}
 & ax^2+bx+c=0 \\
+) & \quad -c \quad -c \\
\hline
 & ax^2+bx \quad = -c
\end{array}
$$

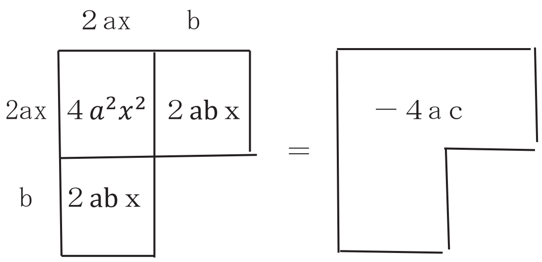
両辺に４a を掛ける。
（４a を掛ける理由は、式変形の途中の計算において、分数が現れないようにする工夫です）

$$4a^2x^2+4abx = -4ac$$

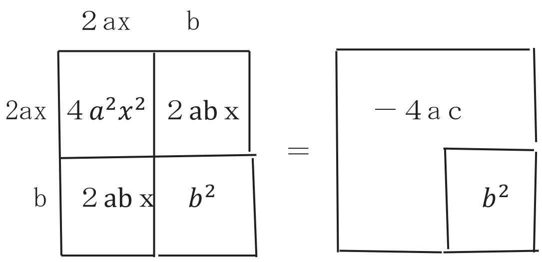
上記の項を下図のようにします。
（４ab x は、２ab x と２ab x に２等分する）



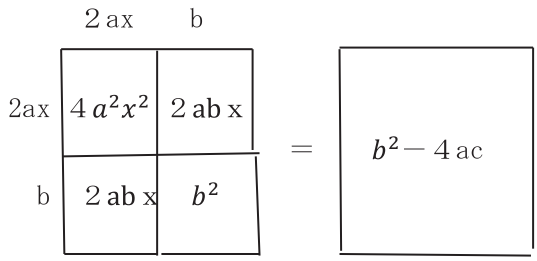
ここで、辺の長さを求めると、下図になります。



正方形にするため、右下を埋めます。

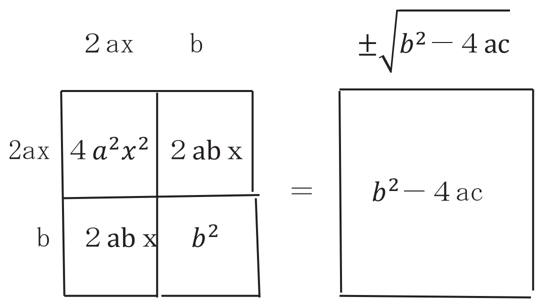


右の正方形の面積は、b^2－４ac となります。



よって、右の正方形の一辺の長さは、

$\pm\sqrt{b^2-4ac}$



左と右の正方形の辺の長さが等しいことより、

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

これから x を求めると、

$$
\begin{array}{rl}
 & 2ax + b = \pm\sqrt{b^2-4ac} \\
+) & \quad -b \qquad -b \\
\hline
 & 2ax \quad = -b\pm\sqrt{b^2-4ac}
\end{array}
$$

よって、

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

これが、２次方程式「 ax^2＋b x ＋c＝０ 」の「解の公式」です。

４．数式を図形に表す（３）

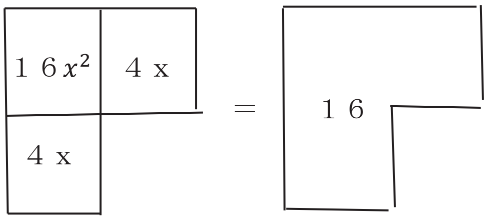
「$2x^2+1x-2=0$」の数式を図形に表してみましょう。

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+1x-2=0 \\
+) & \qquad\quad +2 \quad +2 \\
\hline
 & 2x^2+1x \quad =+2
\end{array}
$$

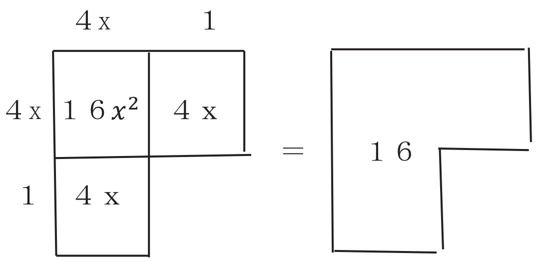
両辺に４×２、即ち８を掛ける。

$$16x^2+8x = 16$$

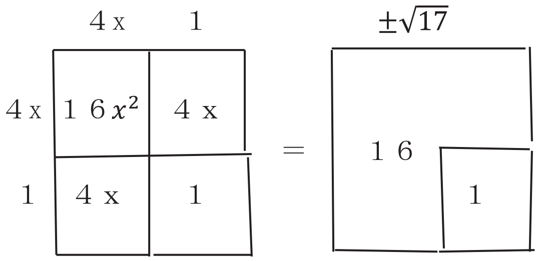
上記の項を下図のようにします。



ここで、辺の長さを決めると、下図になります。



正方形にするため、右下を埋め、右辺の辺の長さを求める。



よって、　$4x+1=\pm\sqrt{17}$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$$

５．まとめ

２次方程式の式を図形に表すことによって、２次方程式の「解の公式」を知らなくても解くことが出来ます。式を図形にどの様に表すかを思考しながら進めていくと、式が図形的に視覚化され、分かりやすく発見的に解を求めることが出来ます。また、「解の公式」の成り立ちも理解出来ます。

６．学生の感想

2016年度～2018年度東京電機大学理工学部、数学科教育法の授業を受講した学生の感想を紹介します。

- 図を用いながら２次方程式を考えることで、公式を使って解くよりも、何をやっているのかイメージをつかみやすくなることが発見できた。
- ２次方程式の素晴らしい解き方. まさか、解の公式が図で表せるなんて。不思議ですね。
- ２次方程式を図を用いて考えた。解の公式を簡単に求められたときは、興奮を覚えた。図の威力がすさまじかった。楽しかった。
- 公式に頼らなくても、図を用いることで２次方程式を解くことが出来る。中学生に教える時に、２次方程式は大変だと思っていたのですが、図だとパズルみたいで楽しいので、これを使って教えてみたいと思いました。
- 図を使って、公式だけに頼らない解き方を体験できた。とても分かりやすかった。計算方法にこれが「絶対」というものは無いと理解した。この方法は、今まで見たことが無かったが、とても素晴らしいものだと思う。
- 数学は暗記する“作業”のようなイメージが強いので、図を用いると、生徒も楽しく覚えられると感じた。暗記が苦手な生徒も興味を示してくれそうだと思う。
- 解の公式が、どうしてあの形なのか理由が分かったので、訳も分からずに覚えさせられるよりよほど覚えやすいだろうと思いました。
- 中々公式が覚えられない生徒、忘れちゃう生徒がいたとき、今回学んだことを教えてあげようと思います。とてもためになりました。